

A FOLHA DE CÁLCULO COMO FERRAMENTA POTENCIADORA DO USO DE ESTRATÉGIAS MULTIPLICATIVAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM CONTEXTO

Dárida Maria Fernandes

ESE/ Instituto Politécnico do Porto

daridafernandes@gmail.com

Isabel Cabrita

Universidade de Aveiro

icabrita@dte.ua.pt

Jaime Carvalho e Silva

Universidade de Coimbra

jaimecs@mat.ua.pt

Resumo A presente comunicação resultou de uma investigação realizada no campo das aprendizagens algébricas contextualizadas em que a folha de cálculo surgiu como suporte tecnológico na resolução de problemas. Para além do desenvolvimento de outras competências pôde-se concluir que o uso continuado desta ferramenta promove a aplicação de estratégias multiplicativas na resolução de problemas sobre relações proporcionais, implicando o reconhecimento de duas variáveis, com evidência para um entendimento mais completo da situação problemática e da própria noção de variável, considerada um dos conceitos fundamentais da aprendizagem da Matemática no ensino básico, secundário e superior (Schoenfeld, 1985, 1987; Schoenfeld & Arcavi, 1988; Philipp, 1992).

Enquadramento

O estudo teve por base três enquadramentos: científico, educativo-didático e tecnológico. No primeiro pesquisaram-se bases conceptuais e estruturantes capazes de ampliar o conhecimento matemático do estudante, num percurso progressivo e aprofundado das aprendizagens algébricas. No segundo procurou-se prosseguir as orientações curriculares e programáticas definidas pelo Ministério da Educação e as perspectivas didáticas indicadas por continuadas investigações de vários especialistas, em particular pelos investigadores do Instituto Freudenthal que defendem uma filosofia particular de educação matemática à qual apelidam de Realist Mathematics Education (RME) que integra a matemática em contexto (MiC - Mathematics in Context). Por último, Drijvers (2001-2004), investigador deste centro e outros como Moreira, (1989); Maxim & Verhey (1988); Billstein (1998) defendem a utilização das tecnologias, nomeadamente, da folha de cálculo na resolução de problemas contextualizados em aprendizagens algébricas.

Enquadramento científico

A Álgebra escolar é vista como um dos temas da Matemática que influencia consideravelmente o conhecimento formal, quer pela potencialidade e simplicidade dos registos simbólicos, quer ainda pelas metodologias associadas, reconhecendo-se, todavia, que grande parte dos estudantes desenvolve uma má relação com este tópico e, consequentemente, com a própria Matemática (Kieran, 1981, 1988, 1992; Schoenfeld, 1985, 1987; Schoenfeld & Arcavi, 1988; Ponte, 1988, 2002; Abrantes, 1988, 1994; Reeuwijk, 1998; NCTM, 1989, 1991, 2000, 2001; Drijvers, 2003).

Álgebra – linguagem e conceito

Tudo indica que a álgebra começa quando a palavra substitui o objecto a designar.

Alguns autores (Kieran, 1988, 1992; Ameron, 2002) falam em pré-álgebra, mas também estes e outros (Carpenter & Levi, 1999; Drijvers, 2001-2004; Martínez, 2005) limitam-se a falar, de forma genérica, em álgebra. Contudo, quase todos estão de acordo que esta temática é a essência da matemática. Assim, a álgebra é vista, antes de tudo, como uma aritmética generalizável que provoca um estudo mais aprofundado das leis numéricas e do desenvolvimento das competências genéricas da aritmética e, simultaneamente, é caracterizada como meio de estudo de procedimentos para o processo de resolução de problemas, de relações entre quantidades (incluindo modelação e funções) e como estudo de estruturas (Usiskin, 1988).

Os investigadores neste domínio são unânimes em defender que a aprendizagem da álgebra escolar alicerça-se no campo aritmético profundo, com a aplicação das propriedades das operações e ainda na resolução de problemas, numa procura de simbologia própria capaz de identificar as essencialidades da situação.

Pré-álgebra

Como os estudantes revelam dificuldades no conceito de variável (Kücheman, 1978, 1981; Schoenfeld & Arcavi, 1988; Kieran & Chalouh, 1993; Kieran, Boileau & Garançon, 1996; Drijvers, 2001-2004; Ameron, 2002, 2004) torna-se necessário o desenvolvimento gradual, compreendido e sustentado deste conceito. Para Zazkis e Liljedahl (2002) a álgebra integra dois conceitos: a *álgebra do pensamento* e a *álgebra do simbolismo*. A álgebra dos símbolos apresenta-se como uma componente expressiva e necessária da álgebra do pensamento e como uma ferramenta de comunicação matemática. Para uma grande especialista desta temática (Kieran, 1988, 1992) a generalização não é equivalente ao pensamento algébrico, mas este requer o simbolismo algébrico que fundamenta e expressa a generalização.

Segundo Batanero e Godino (1998), no trabalho matemático, os símbolos (significantes) remetem-nos para as entidades conceptuais (significados). Estes autores consideram que o ponto crucial da instrução matemática não está no domínio da sintaxe da linguagem simbólica matemática, mas sim na compreensão da sua semântica, ou seja, na natureza dos próprios conceitos e proposições matemáticas e sua relação com os contextos e situações-problema.

Por outro lado, Ameron (2002) sugere o termo 'pré-álgebra' como uma zona de transição de actividade exploratória informal oriunda da aritmética para iniciar a álgebra. Esta autora defende que a pré-álgebra envolve pensamento algébrico e simbolização no campo da aritmética, acrescentando que não é a natureza da tarefa que faz a diferença, mas sim a natureza da estratégia na descoberta da solução que interessa

e que distingue a aritmética, da pré-álgebra ou da álgebra num processo gradual de formalização das notações que acompanham o processo intelectual de abstracção. Mas neste processo Kieran (1988, 1992) alerta para as dificuldades de aprendizagem na álgebra estarem concentradas no significado das letras, no reconhecimento e uso da estrutura e na alteração das convenções aritméticas às algébricas. Segundo esta autora existem, assim, duas dificuldades de ordem ontológica no estudo da álgebra e, em particular, no seu ensino inicial: *operacional* (ou procedimental) e *estrutural* (relacional), isto é, nos modos de resolver e pensar nos problemas. Esta autora insiste que se deve ter consciência desta situação e a partir dela actuar na procura de uma aprendizagem sustentada e equilibrada da álgebra, diversificando estratégias e materiais e analisando processos de resolução dos estudantes.

Aproximações à Álgebra

Segundo Bednarz, Kieran & Lee (1996) existem genericamente cinco aproximações à álgebra defendidas também por vários investigadores: *a primeira aproximação*, a generalização de padrões geométricos e numéricos e a descoberta de leis que definem numericamente essas relações; *a segunda*, a resolução de problemas; *a terceira aproximação*, a resolução de equações no apoio à resolução de problemas; *a quarta*, a modelação de fenómenos físicos e matemáticos e *a quinta aproximação*, o trabalho com as relações funcionais. Estes autores colocam algumas questões sobre a passagem de uma aproximação da álgebra para outra, por exemplo: como é que os estudantes negociam a passagem da álgebra como uma ferramenta para a generalização e a álgebra como uma ferramenta da resolução de problemas ou a álgebra como uma ferramenta para a modelação de situações funcionais e questionam se será uma passagem simples ou se implicará o ajustamento de importantes conceitos. Segundo aqueles autores esta é ainda uma questão por esclarecer.

Nesta investigação as tarefas seleccionadas para os estudantes dos dois primeiros níveis de ensino localizam-se no uso das três aproximações à álgebra: padrões e generalização; resolução de situações problemáticas específicas e outras próximas da modelação de fenómenos.

Enquadramento educativo e didáctico

Com esta investigação procurou-se prosseguir a construção gradual e significativa do conhecimento algébrico, com base no quadro teórico conceptual referido, nas orientações pedagógicas já delineadas por vários autores. A construção deste conhecimento algébrico em idades elementares assenta ainda no uso de materiais adequados, numa comunicação intensa com os estudantes, com enfoque na importância do contexto do problema. Nestas circunstâncias o trabalho em sala de aula teve como alicerce as teorias educativas da aprendizagem construtivista e da aprendizagem social preconizadas, respectivamente, por Piaget (1965, 1975a, 1975b), Bruner (1983, 1985, 1987); Vygotsky (1979); Vygotsky & Lúria (1993), Lave (1988-1997), Wenger (1998), Lave & Wenger (1991-2002). Na exploração de conhecimentos relacionados com este domínio foram também tidos em conta os conceitos da matemática em contexto e da matematização, defendidos por investigadores do Instituto Freudenthal, bem como as orientações programáticas ministeriais associadas à aprendizagem interdisciplinar programadas na gestão flexível do currículo expostas no Decreto-Lei nº 6/2001.

No quadro teórico conceptual referido, Janvier (1996); Weber-Russell e LeBlanc (2004), Drijvers (2001-2004), entre outros autores, defendem o estudo da linguagem algébrica numa perspectiva holística do conhecimento matemático, pois a álgebra escolar é referida como uma ciência de estrutura significativa e coerente, que se move entre o mundo real e o mundo dos símbolos, sendo nestes enquadramentos que a matemática deve ser problematizada, aprendida e ensinada (Freudenthal, 1973, 1983). Tal como Freudenthal também outros autores do Freudenthal Institut da Universidade de Utrecht, nos nossos dias, defendem o tratamento dos conceitos relacionados com a álgebra de uma forma contextualizada procurando colocar o estudante num ambiente rico de resolução de problemas capazes de estimular o raciocínio e o desenvolvimento de linguagem algébrica.

Enquadramento tecnológico

Numa sociedade em contínua mutação, as evoluções tecnológicas, culturais e sociais influenciam claramente tudo o que se passa na Escola, em geral, e, em particular, na sala de aula (Fey, 1984; Mendes, 1998). Nestas circunstâncias, a Escola deve munir-se de mecanismos e de uma organização capaz de atender aos estudantes com maiores dificuldades e deficiências em matemática e simultaneamente aos mais talentosos para conseguirem suportar e orientar as suas aprendizagens para a excelência, procurando criar, assim, a equidade na classe (NCTM, 2000).

A tecnologia começa também a apresentar-se como uma base e factor de *comunicação* (NCTM, 1991, 2000), na qual os estudantes precisam de resolver tarefas que incluam tópicos de discussão e confronto de ideias matemáticas cruciais no ensino e na aprendizagem.

Esta associação considera também que “o acesso à tecnologia precisa de se tornar numa outra dimensão educacional da equidade” (2000, p. 14) e “(...) é essencial no processo de ensino e aprendizagem, dado que esta influencia a própria matemática que é ensinada e amplia simultaneamente a aprendizagem do estudante” (NCTM, 2000, p. 24).

A folha de cálculo como ferramenta centrada na aprendizagem do estudante

O NCTM (1991, 2000) e Weber-Russell e LeBlanc (2004) defendem que a tecnologia é uma ferramenta poderosa capaz de criar ambientes favoráveis à aprendizagem, oportunidades e desafios na comunicação matemática, especificamente, no desenvolvimento e análise da linguagem. Neste sentido, apontam a folha de cálculo como um desses instrumentos potenciador de boas práticas, no qual é possível experimentar dinamismo intelectual, permitindo ao estudante reformular os raciocínios baseados em novas quantidades. Por exemplo, os símbolos usados na folha de cálculo podem ser relacionados e bem trabalhados, pois não são, normalmente, os mesmos símbolos algébricos usados na Matemática.

Hoje em dia as tecnologias não são apenas meios ou instrumentos, são também consideradas contextos, linguagens e modos de comunicação, como acontece, em particular, com a utilização da folha de cálculo, como refere Fernandes (1994, 2000 e 2006), pois proporciona um ambiente que exige a montante actividades preparatórias que produzem conhecimento matemático praticamente inexplorado noutras circunstâncias. Segundo esta investigadora o uso desta ferramenta provoca

necessariamente o desenvolvimento prévio de actividades relacionadas com a capacidade de orientação espacial e de localização cartesiana, através de jogos no espaço, de exercícios sobre leitura de mapas, de jogos das damas ou do xadrez e da batalha naval, capazes de provocarem o desenvolvimento de capacidades ao nível da observação, do estabelecimento de relações entre os dados aquando da localização de um elemento no plano.

Também Moreira (1989) defende a utilização desta ferramenta nas aulas de Matemática pois considera que a folha de cálculo é particularmente útil na descoberta de regularidades e na resolução de problemas por ensaio e erro sistemático. Numa linha idêntica Fernandes (1994) defende que os estudantes do 4º ano de escolaridade, para tirarem partido da folha de cálculo, precisam de conhecer a funcionalidade de apenas alguns comandos e que esta ferramenta fomentou a organização de pesquisas e proporcionou a capacidade dos estudantes resolverem problemas, mostrando-se a classe mais aberta para a partilha, emergindo “novos diálogos” e uma nova dinâmica na sala de aula.

Problematização e objectivos

Uma das questões problematizadas nas aprendizagens contextualizadas da álgebra foi: será que é possível evidenciar competências específicas resultantes do uso da folha de cálculo na resolução de problemas em contexto interdisciplinar na aprendizagem da álgebra no ensino básico?

Neste sentido, a investigação desenvolvida neste domínio previa a utilização daquele suporte tecnológico capaz de prosseguir os seguintes objectivos na resolução de determinados problemas:

- promover a capacidade de observar, relacionar e conjecturar;
- desenvolver o raciocínio indutivo e dedutivo;
- promover o raciocínio algébrico;
- promover a capacidade de relacionar os conhecimentos matemáticos com o quotidiano e os saberes sociais;
- relacionar dados em tabelas e tirar conclusões;
- problematizar o conhecimento matemático em contexto real.

Metodologia

A investigação teve um carácter essencialmente qualitativo, estudando processos e estratégias de abordagem na resolução das tarefas propostas, mas também tendo em atenção os resultados obtidos pelo estudante, especialmente, no desenvolvimento do raciocínio algébrico, isto é, na capacidade de relacionar dados utilizando uma ou duas variáveis.

Através da observação participante em que a investigadora participou, desde o 2º ano de escolaridade, com a coordenação de um projecto de âmbito interdisciplinar no campo da geometria, na planificação, acompanhamento em sala de aula e reflexão conjunta com as professoras foi possível, observar e recolher informação neste processo educativo complexo, procurando uma análise tão objectiva quanto possível da aprendizagem do aluno. A presença da investigadora foi gradualmente intensificada, estando presente na sala de aula do 5º e 6º anos nas duas turmas duas vezes por semana.

Saliente-se ainda que foram usados outros instrumentos de recolha de dados, como: questionários, diários de bordo, entrevistas gravadas com os alunos e professores, registos fotográficos, em vídeo, ficheiros gravados pelos alunos e com base na triangulação dos vários elementos recolhidos procedeu-se à reflexão e à análise da informação compilada.

Com vista à prossecução dos objectivos delineados e à construção contextualizada dos conhecimentos algébricos foram exploradas as mesmas tarefas nas duas turmas, mas sempre que se considerava como uma mais valia na turma experimental (turma A) foi usada a folha de cálculo.

Resultados

Neste trabalho continuado e acompanhado pode-se analisar os resultados obtidos do “follow up” das aprendizagens realizadas pelos estudantes que a seguir se referem.

Quarto ano de escolaridade

Os cinco problemas propostos: “*vamos fazer um bolo!...*”; “*a compra de cromos*”; “*a pintura das peças de cerâmica*”; “*a cantina escolar*”; “*a carga certa para o “peso” certo*” inserem-se numa determinada classe de problemas cujos conteúdos explorados estão próximos do conceito de proporcionalidade e abrangem as três aproximações à álgebra já anteriormente referidas: padrões e generalizações, resolução de problemas e modelação. Esta orientação prevê uma linha de complexidade gradual e de aplicação progressiva, de um contexto real, próximo das vivências da criança, com a possibilidade de uma resolução mais concreta e experimental a um contexto mais afastado do quotidiano da criança exigindo um tratamento mais formal e simbólico.

Na resolução do primeiro problema: “*a compra de cromos*”, no preenchimento das lacunas na tabela não se conseguiu vislumbrar o processo de resolução usado pelos estudantes das duas turmas.

Na realização da folha de trabalho: “*a pintura das peças de cerâmica*”, resultante após a visita a uma fábrica, a primeira questão compreendia duas sub-questões: uma de um valor sequencial e outra com a extrapolação do valor, questionando-se: “*nas condições idênticas da tabela qual seria o tempo gasto na pintura de nove peças do modelo? E na elaboração de 20 peças? Expõe os teus raciocínios*”. A maior parte dos estudantes das duas turmas, vinte e um e vinte e dois estudantes respondeu correctamente à questão, respectivamente, na turma A e B.

Nº de peças pintadas	2	4	5	7	8
Tempo (em horas)	3	6	7,5	10,5	12

Na turma A doze estudantes usaram expressamente o operador multiplicativo “ $\times 1,5$ ”, outros omitiram os cálculos utilizados, mas nenhum utilizou, explicitamente, uma forma aditiva para chegar ao resultado pretendido.

Na determinação do tempo gasto na pintura das nove peças saliente-se que apenas 2 estudantes da turma B usaram o operador multiplicativo, neste caso “ $\times 1,5$ ”, e que os restantes fizeram-no, de forma aditiva, usando uma diversidade de possibilidades, registando-se, a título de exemplo, as seguintes.

Uso de estratégias aditivas – “A pintura das peças de cerâmica”

Alguns estudantes, da turma B, referiram oralmente à investigadora:

i) 5 peças demoram a ser pintadas – 7,5h

4 peças demoram a ser pintadas – 6h,

ora: $6+7,5=13,5$, correspondendo a $5+4=9$ peças, que é o número pedido

E acrescentou um dos estudantes:

Ou $10,5+3$, correspondendo a 7 peças e mais 2 peças, que é a resposta correcta.

No caso das 20 peças os estudantes apresentaram também vários processos, principalmente a composição e a decomposição da quantidade 20, designadamente:

i) Como $20 \text{ peças} = 8+8+4$ e, concretizando o algoritmo, como se observa na figura anterior, chegou ao resultado: $12+12+6=30$

Outro estudante chegou ao resultado correcto, sem assinalar os procedimentos, mas referiu oralmente à professora o seu raciocínio:

ii) Como $20 \text{ peças} = 4+4+4+4+4$ então, soma-se o 6 cinco vezes: $6+6+6+6+6=30$

Assim, os estudantes da turma B basearam-se num modelo aditivo para responder à questão decompondo, de forma diferenciada, as quantidades: 9 e 20. Na resolução das questões, os estudantes da turma B procuraram, com maior frequência, explorar

estratégias aditivas para resolver o problema, aproximando-se da composição e decomposição de quantidades e relacionando linearmente, “*per si*” com os respectivos valores da tabela. Apenas dois estudantes da turma B usaram o operador multiplicativo, explorando a relação numérica que relacionava as duas variáveis: a *variável discreta*, número de peças com a *variável contínua*, número de horas gastas na pintura das mesmas. Este procedimento não aconteceu na turma A na qual a maior parte dos estudantes (12) utilizou efectivamente o *operador multiplicativo* para determinar o tempo gasto aproximado na pintura de nove e vinte peças.

Na concretização da folha de trabalho designada por: “*a cantina escolar*”, a maior parte dos estudantes das duas turmas, cerca de 70%, conseguiu resolver correctamente a primeira questão, na qual se pretendia que fosse atribuído um valor numérico a cada uma das duas letras que se encontravam na tabela dada.

Quantidade de maçãs (em quilos)	40	35	30	a	10
Preço	€13,60	b	€10,20	€8,50	€3,40

Na apresentação dos cálculos apreende-se que a maior parte dos estudantes das duas turmas alcançou a solução através do preço unitário³² calculado com base nos valores apresentados na última coluna da tabela, no preço de 10Kg de maçãs, cuja correspondência era de 10 para €3,40.

Na turma A nove estudantes usaram o operador multiplicativo (“ $\times 0,34$ ”) para determinar o valor da letra **b** e o operador inverso (“ $: 0,34$ ”) para atribuir o valor à letra **a**.

Na turma B, alguns estudantes usaram estratégias aditivas, mas também estratégias mistas, pois para calcular o valor da letra **a** utilizaram processos aditivos e para determinar o valor de **b** exploraram já a estratégia multiplicativa, descobrindo o operador multiplicativo.

Uma estudante (Alex, nome fictício) utilizou a decomposição de quantidades com cálculos algorítmicos para calcular o valor da letra **a** e explicou oralmente:

*Como €3,40 corresponde a 10Kg e $3,40+3,40+1,70=8,50$, que é o valor que está na tabela, então dá-me o valor de cima, que é o valor da letra **a**.*

Entretanto, na folha de trabalho desenhou o esquema seguinte e usou o operador multiplicativo, realizando o algoritmo no cálculo da letra **b**.

The image shows two handwritten calculations. The left calculation uses an additive strategy to find the value of 'a'. It starts with 3,40, adds it to itself three times (indicated by arrows), resulting in 10,40. Then, it subtracts 1,90 from 10,40 to reach 8,50. The right calculation uses a multiplicative strategy to find the value of 'b'. It shows the multiplication of 35 by 0,34, resulting in 11,90.

Uso da estratégia mista: aditiva e da multiplicativa – “*A cantina escolar*”

³² Moreira (1989) salienta que, em idades elementares, os estudantes tendem a conhecer o valor unitário do produto para depois reconhecerem e aplicaram esse conhecimento à resolução do problema.

Um outro estudante desta turma B, com facilidades em Matemática (Tig, nome fictício), realizou cálculos mentais e rapidamente chegou aos resultados, explicando à investigadora como tinha calculado o valor da letra **b** e de **a**.

Experimentei com o valor 10, o último valor da tabela

*Como $35=10+10+10+5$, então tem-se: $3,40+3,40+3,40+1,70=11,90$. É este o valor de **b**.*

*Para **a** também é simples: $3,40+3,40+1,70=8,50$, então tenho: $10+10+5$ e **a**=25.*

Tudo indica que os estudantes que analisam linearmente os valores da tabela e propõem correspondências pontuais, não relacionam os dados a “duas dimensões”, isto é, não estabelecem a relação entre as duas variáveis das duas linhas da tabela e, deste modo, não conseguem de forma extrapolada, descobrir uma expressão universal que relacione qualquer número de quilos de maçãs com o respectivo preço.

Quinto e sexto ano de escolaridade

Na resolução das tarefas propostas nestes dois anos e apesar de existir uma evolução no sentido da utilização de estratégias mistas e de estratégias multiplicativas na turma B pode-se referir que são raros os casos de estudantes da turma A que apresentam uma estratégia aditiva e houve mais estudantes desta classe a utilizarem o operador multiplicativo do que nos da turma B

Dados recolhidos do teste

Numa pergunta do teste realizado no 6º ano de escolaridade, focavam-se conhecimentos relacionados com o operador “x2”, numa circunstância relacionada com o crescimento exponencial de bactérias. Os resultados obtidos e processos desenvolvidos na segunda sub-questão, pelos estudantes das duas turmas no pré-teste foram muito idênticos no que concerne às respostas completas, nove (45%) e oito (40%), respectivamente, na A e B e um estudante de cada turma respondeu parcialmente.

Mas no pós-teste na turma A houve uma *evolução significativa*, dado que a maior parte dos estudantes (65%) conseguiu resolver completamente a questão pelo uso de uma regularidade multiplicativa evocando simbolicamente ou por linguagem corrente o operador “x2” e dois estudantes apresentaram uma resposta parcial, pois confirmaram o crescimento das bactérias, mas não recorreram a uma regularidade quantitativa.

Contudo, na turma B houve uma *ligeira evolução*, mas ainda em resultados negativos em que 45% dos estudantes resolveu completamente a questão e um fê-lo de forma parcial.

Conclusões

Na investigação pretendia-se prosseguir os objectivos traçados sobre as aprendizagens algébricas contextualizadas e, em particular, analisar a importância da folha de cálculo na resolução de problemas sobre relações de proporcionalidade. Segundo (Moreira, 1989) na resolução deste tipo de problemas, neste nível etário, surgem dois tipos de estratégias: a) *estratégia aditiva* ou *modelo pré-formal*, identificado com uma estratégia construtiva relacional e linear, orientado para a exploração de uma só variável, analisando dados de uma só “fila” (linha ou coluna), baseando-se na composição e decomposição de quantidades e numa resolução particular e casuística; b) *estratégia multiplicativa*, identificada com a exploração de duas variáveis, numa análise do particular para o geral, com definição da “fórmula” ou “expressão matemática” que generaliza o fenómeno. Enquanto que o modelo multiplicativo tem uma expressão universal, revelando-se como um processo generalizável, objectivo e não dependente do indivíduo, o modelo aditivo é “funalizado”, tem carácter subjectivo, é diferenciado e revela variadas formas de representação do raciocínio.

Nesta investigação constata-se também que na resolução de problemas de aplicação do raciocínio de tipo proporcional e entre as diversas estratégias correctas apresentadas identificam-se basicamente duas: estratégia construtiva, aditiva ou linear e a estratégia multiplicativa, ou bidimensional em que o estudante relaciona duas variáveis. Tal como Moreira e outros especialistas desta temática a primeira estratégia, muito frequente, no estágio pré-formal, consiste em exprimir a medida como combinação linear de diferentes medidas, a segunda consiste em reconhecer que os termos de uma relação estão ligados por um operador multiplicativo e em reconhecê-lo ou aplicá-lo à segunda relação.

O estudo realizado com estas duas turmas indica que os estudantes da turma A, na resolução de problemas sobre conceitos associados às relações de proporcionalidade, tendem a iniciar mais cedo a exploração da estratégia multiplicativa do que aqueles que não utilizaram a folha de cálculo. Assim, tudo indica que esta ferramenta tecnológica estimula e favorece o processo dinâmico de conhecimento, através do qual o estudante aplica a relação dada entre duas variáveis ou descobre a lei que rege o fenómeno, aprofundando conhecimentos relacionados com a generalização do padrão – *1ª aproximação à álgebra* e a *3ª aproximação à álgebra*, numa perspectiva contextualizada da explicitação do modelo multiplicativo que rege o fenómeno.

Referências

- Abrantes, P. (1988). *A renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM. (Publicação deste artigo na Gazeta de Matemática, nº 146, Janeiro de 2004).
- Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos estudantes com a Matemática: A experiência do projecto MAT₇₈₉* (tese de doutoramento). Lisboa: APM.
- Ameron, B. (2002). *Reinvention of early álgebra. Developmental research on the transition from arithmetic to álgebra*. Utrecht: Institut Freudenthal.
- Ameron, B. (2004). Documentos internos e entrevista concedida à investigadora em Utrecht, no Freudenthal Institut.

- Batanero, C. & Godino, J. (1998). Funciones Semióticas en la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. In *Seminário de Investigação em Educação Matemática IX*, (pp. 25-45).
- Bednarz, N.; Kieran, C. & Lee, L. (1996). Approaches to algebra: perspectives for research and teaching. In Bednarz N., Kieran C. & Lee L. (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*, (pp. 3-12). Mathematics Education Library. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.
- Billstein, R. (1998). Language and Representation in Algebra: a view from Middle. In National Council of Teachers of Mathematics (Ed.), *The Nature and Role of Algebra in K-14 Curriculum: Proceedings of National Symposium*, (pp. 89-90). Washington, DC.: National Academy Press.
- Bruner, J. (1983). *Le développement de l'enfant – Savoir faire, savoir dire*. Paris: Press Universitaires de France.
- Bruner, J. (1985). Vygotsky: a historical and conceptual perspective. In J. Wertsch (Ed.), *Culture, communication and cognition: Vygotsky perspectives*. New York: Academic Press.
- Bruner, J. (1987). *O processo da educação*. Companhia Editorial Nacional. Volume 126.
- Carpenter, T. & Levi, L. (1999). "Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades". *Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association*. Montreal.
- Drijvers, P. (2001-2004). Learning algebra in a computer environment. In Drijvers, P. (Ed.), *Classroom-based research in Mathematics Education*, (pp. 83-104). Utrecht: Freudenthal Institut.
- Drijvers, P. (2003), *Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter*. Utrecht: FI.
- Fernandes, D. M. (1994). *Utilização da folha de cálculo no 4º ano de escolaridade. Estudo de uma Turma*. Tese de Mestrado em Educação. Braga: Universidade do Minho.
- Fernandes, D. M. (2000). *Aprender matemática com a calculadora e a folha de cálculo*. Porto: Porto Editora.
- Fernandes, D. M. (2006). *Aprendizagens algébricas em contexto interdisciplinar no ensino básico*. Tese de Doutoramento. Universidade de Aveiro.
- Fey, J. T, (Ed.) (1984). *Computing and Mathematics*. Reston, E.U.A.: NCTM.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Reidel: Dordrecht.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of mathematical Structures*. Reidel: Dordrecht.
- Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. In Bednarz, N.; Kieran, C. & Lee, L. (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*, (pp. 225-236). Mathematics Education Library. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.
- Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics* 12, August, (pp. 317-326).

- Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In Douglas, A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan Publishing Company.
- Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners. In Arthur, Coxford F. & Albert, Shulte P. (Eds.), *The Ideas of Algebra, k-12*. Yearbook 1988. N.C.T.M.
- Kieran, C. & Chalouh, L. (1993). Prealgebra: the transition from arithmetic to algebra. In Douglas, T. Owens (Ed.), *Research ideas for the Classroom. Middle Grades Mathematics*. NCTM. Research Interpretation Project. New York: Macmillan Publishing Company.
- Kieran, C.; Boileau, A. & Garançon, M. (1996). Introducing algebra by means of a technology-supported, functional approach. In Bednarz, Nadine; Kieran, Carolyn & Lee, Lesley (Eds.), *Approaches algebra: perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Kücheman, D. (1978). Children's Understanding of Numerical Variables. *Mathematics in the School* 7, nº 4, (pp. 23-26).
- Kücheman, D. (1981). Álgebra. In K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics*: (p. 11-16; pp. 102-119). London: John Murray.
- Lave, J. (1988-1997). *Cognition in Practice. Mind, mathematics and culture in everyday life*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lave, J. & Wenger, E. (1991-2002). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge Press University.
- Martínez, E. C. (2005). Configurações pontuais. Sistema de representação idóneo para as sucessões de números naturais. In Henrique M. Guimarães & Lurdes Serrazina (Ed.), *V CIBEM Conferências*, (pp. 251-264). Porto: APM.
- Maxim, B. R. & Verhey, R. F. (1988). Using Spreadsheets in Algebra Instruction. In Arthur, Coxford F. & Albert, Shulte P. (Eds.), *The Ideas of Algebra, k-12*. Yearbook 1988. N. C. T. M.
- Mendes, E. (1998). Características e potencialidades educativas das actividades de investigação. *Seminário de Investigação em Educação Matemática*, IX, (pp. 135-164). Lisboa: APM.
- Moreira, M. L. (1989). *A Folha de Cálculo na Educação Matemática*. Tese de Mestrado. Lisboa: Projecto MINERVA. Departamento de Educação. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE (tradução portuguesa de *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, 1989).
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2001). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Coleção de Adendas. Anos de Escolaridade 5-8. Lisboa: APM.

- Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *Mathematics Teacher*, 85(7), 557-561.
- Piaget, J. (1965). *The child's conception of the world*. Totowa, NJ: Littlefield, Adams e Co.
- Piaget, J. (1975a). *A construção do Real na Criança*. (2ª edição). Rio de Janeiro: Zahar Editores/MEC.
- Piaget, J. (1975b). *A formação do símbolo na Criança*. (2ª edição). Rio de Janeiro: Zahar Editores/MEC.
- Ponte, J. P. (1988). Matemática, insucesso e mudança: Problema possível, impossível ou indeterminado? *Revista Aprender*, 6, 20-23.
- Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. *Reflectir e Investigar sobre a Prática Profissional*. Lisboa: Grupo de Trabalho sobre Investigação -APM.
- Reeuwijk, Martin (1998). Structure in School Algebra (Middle School). In National Council of Teachers of Mathematics (Ed.), *The Nature and Role of Algebra in K-14 Curriculum: Proceedings of National Symposium*, (pp. 83-85). Washington, DC.: National Academy Press.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Inc.
- Schoenfeld, A. H. (1987a). *Cognitive Science and Mathematics Education*. London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Schoenfeld, A & Arcavi, A. (1988). On the meaning of Variable. *Mathematics Teacher* 81, September, 420-427.
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In Arthur, Coxford F. e Albert, Shulte P. (Eds.), *The Ideas of Algebra, k-12*. Yearbook 1988. N. C. T. M.
- Weber-Russell, S. & LeBlanc, M. D. (2004). Learning by seeing by doing: arithmetic word problems. In Janet L. Kolodner e Sasha Barab e Michael Elsenberg (Eds.), *The journal of he learning sciences*. Vol 13, nº 2. Utrecht: Freudenthal Institut.
- Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning and Identity*. New York: Cambridge University Press.
- Vygotsky, L. S. (1979). *Pensamento e Linguagem*. (M. Resende, Trans.). Lisboa: Portugal. Edições Antídoto.
- Vygostky, L. S. & Luria, A. R. (1993). *Studies on history as behaviour: primitive and child*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Eductional Studies in Mathematics, International Journal*, 49, 379-402. Kluwer Academic Publishers.